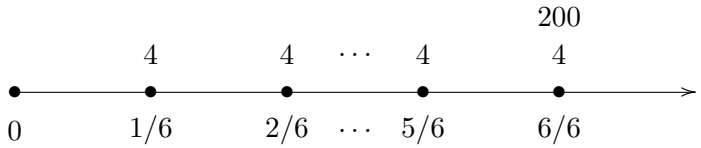
Matematica finanziaria: svolgimento della prova di esonero del 28 marzo 2007

1. Bobo e Bubi affrontano la loro prima crisi familiare a causa della mancanza di una lavastoviglie. Decidono pertanto di acquistarne una che costa 270€, e non possedendo tale cifra Bobo investe 200€ in regime nominale al tasso semestrale del 12% pagabile mensilmente, con reinvestimento delle cedole in regime esponenziale al tasso semestrale del 10%. Bobo garantisce a Bubi che tra 6 mesi il montante sarà poco più di 270€, in quanto investire al 12% semestrale nominale pagabile mensilmente è equivalente a investire in regime esponenziale al tasso 12.62% semestrale, e $240(1.1262) = 270.288$. Calcolare il montante dopo 6 mesi e trovare l'errore di Bobo.

Svolgimento.

L'esercizio è sul funzionamento del regime nominale. Come prima cosa calcoliamo la cedola: il 12% semestrale di 200€ è 24€ ogni 6 mesi, e pagabili mensilmente significa 4€ al mese. L'operazione finanziaria su 6 mesi è rappresentata allora da



dove abbiamo scelto di rappresentare il tempo in semestri (e dunque un mese è 1/6 di semestre) in quanto il regime di reinvestimento è dato con un tasso semestrale.

Il montante cercato è la somma dei montanti dati dalle singole cedole (investite in regime esponenziale al tasso semestrale del 10%), più il capitale iniziale che ci verrà restituito alla fine:

$$\begin{aligned}\text{montante} &= 4(1+0.1)^{5/6} + 4(1+0.1)^{4/6} + \cdots + 4(1+0.1)^{1/6} + 4 + 200 \\ &= 4\frac{1.1^{6/6}-1}{1.1^{1/6}-1} + 200 = 224.981.\end{aligned}$$

Cerchiamo ora di capire il ragionamento di Bobo. La sua affermazione è: "investire al 12% semestrale nominale pagabile mensilmente è equivalente a investire in regime esponenziale al tasso 12.62% semestrale". Per fare questa affermazione Bobo si è calcolato il tasso i equivalente al 12% semestrale nominale pagabile mensilmente, che viene dall'equazione

$$6[(1+i)^{1/6} - 1] = 0.12 \Rightarrow i \cong 0.1262$$

Visto che il tasso equivalente è il 12.62%, Bobo ritiene che investire in regime nominale al 12% semestrale pagabile mensilmente o in regime esponenziale al 12.62% semestrale sia la stessa cosa: ma in questo ragionamento non entra in gioco la modalità di reinvestimento -è chiaro che se reinvesto le cedole al 99% avrò un montante diverso da quello che otterrò tenendole sotto al cuscino! Dunque il ragionamento di Bobo non può essere giusto a prescindere dalla modalità di reinvestimento. La frase giusta sarebbe infatti: "investire al 12% semestrale nominale pagabile mensilmente è equivalente a investire in regime esponenziale al tasso 12.62% semestrale, se le cedole vengono reinvestite in regime esponenziale al tasso 12.62% semestrale".

Il conto finale che fa Bobo è $240 \cdot 1.1262 = 270.288$, mentre avrebbe dovuto fare $200 \cdot 1.1262$, e questo è un altro errore. Questo errore però non è attribuibile a Bobo, bensì al redattore del testo dell'esercizio, che ha erroneamente scritto 200 invece di 240 nella seconda riga. L'esercizio senza refusi è allora:

Bobo e Bubi affrontano la loro prima crisi familiare a causa della mancanza di una lavastoviglie. Decidono pertanto di acquistarne una che costa 270€, e non possedendo tale cifra Bobo investe 240€ in regime nominale al tasso semestrale del 12% pagabile mensilmente, con reinvestimento delle cedole in regime esponenziale al tasso semestrale del 10%. Bobo garantisce a Bubi che tra 6 mesi il montante sarà poco più di 270€, in quanto investire al 12% semestrale nominale pagabile mensilmente è equivalente a investire in regime esponenziale al tasso 12.62% semestrale, e $240 \cdot 1.1262 = 270.288$. Calcolare il montante dopo 6 mesi e trovare l'errore di Bobo.

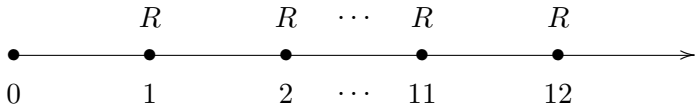
Il montante in questo caso viene 269.978, insufficiente (ma per poco) a pagare la lavastoviglie, e questo perché le cedole vengono reinvestite al 10%! Se le cedole venissero reinvestite al 12.62% si otterrebbe come montante (approssimatamente, perché 12.62 è un valore approssimato) $240 \cdot 1.1262 = 270.288$, e in tal caso il ragionamento di Bobo sarebbe stato giusto. ■

2. Bobo chiede un prestito di 270€ per comprare la lavastoviglie, e gli viene proposto un ammortamento francese al 10% mensile su 12 mesi. Bubi suggerisce invece un ammortamento americano su 12 mesi, remunerato al 10% mensile, con quote capitale sul fondo *orewaminnanokanetoru*[1] che rende al 12% mensile in regime lineare. Bobo accetta il suggerimento in quanto $12 > 10$. Calcolare la rata che si sarebbe versata nel caso francese, la rata da versare nel caso americano, e trovare l'errore di Bobo.

Svolgimento.

Bobo ha di fronte due scelte:

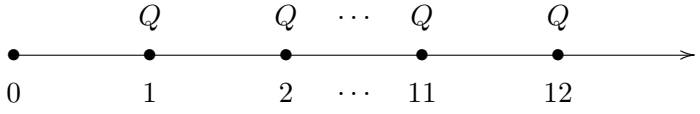
(a) ammortizzare il prestito in modalità francese, e in tal caso pagare una rata mensile R che si trova imponendo che il valore attuale al 10% di



sia pari a 270, cioè

$$R(\nu \frac{1-\nu^{12}}{1-\nu}) = 270 \Rightarrow R \cong 39.6261$$

(b) ammortizzare il prestito in modalità americana, e in tal caso pagare gli interessi al 10% ogni mese, più una quota capitale Q che si trova imponendo che il montante al 12% *in regime lineare* di



sia pari a 270, cioè

$$Q(1 + 0.12 \cdot 11) + Q(1 + 0.12 \cdot 10) + \cdots + Q(1 + 0.12 \cdot 1) + Q = 270$$

da cui

$$Q = 270/(12 + 0.12 \cdot 66) \cong 13.5542.$$

L'ammortamento americano richiederà pertanto di pagare ogni mese $13.5542 + 27 = 40.5542$, e la scelta di Bobo risulta non conveniente!

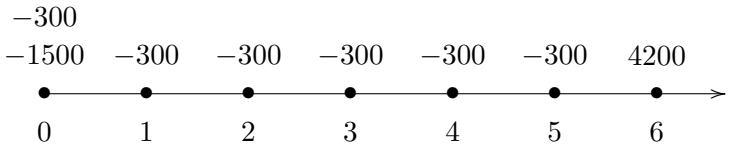
[1] Giapponese per *io mi prendo tutti i soldi.*

Che ragionamento fa Bobo? Pensa: "Visto che il fondo rende al 12%, e visto che al corso di matematica finanziaria ho capito che l'ammortamento americano conviene rispetto a quello francese quando il fondo rende a un tasso maggiore del tasso di remunerazione del debito -che in questo caso è il 10%- scelgo l'ammortamento americano". L'errore sta nel fatto che il fondo rende in regime lineare e non esponenziale! Notare che se il fondo rendesse al 10% esponenziale (cioè lo stesso tasso di remunerazione del debito) la rata da pagare sarebbe la stessa nel caso americano e francese -verificare per esercizio. ■

3. Bobo viene mandato per lavoro 6 mesi nella Monument Valley. Considerando che la spesa per i biglietti aerei è 1500€, che all'inizio di ogni mese Bobo spenderà 300€ di affitto, e che al ritorno gli verranno dati 4200€ per la trasferta, calcolare il tasso interno di rendimento di questo viaggio.

Svolgimento.

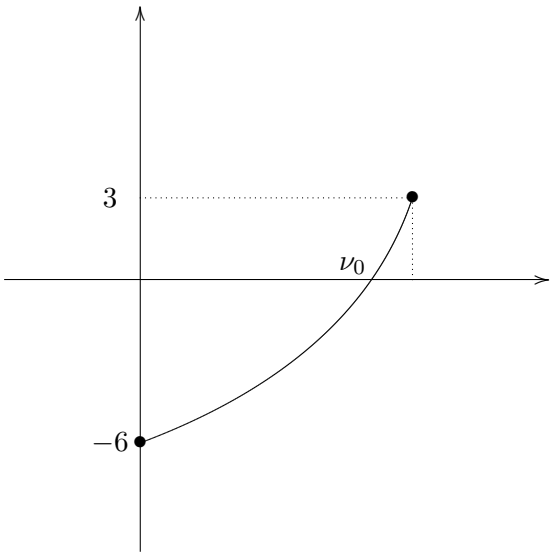
Si tratta di calcolare il TIR di



cioè il risultato dell'equazione[2]

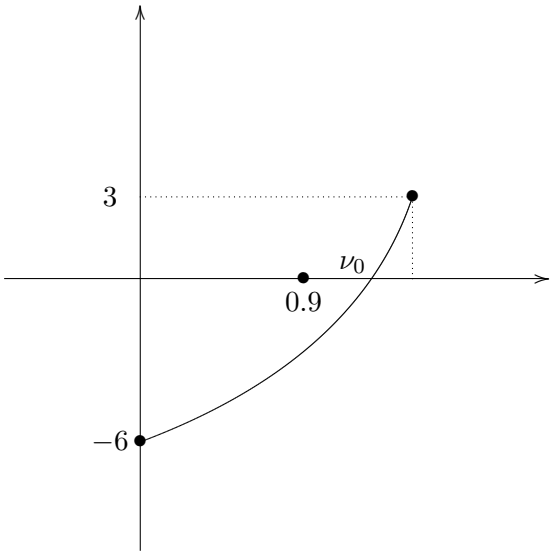
$$f(\nu) = -6 - \nu - \nu^2 - \nu^3 - \nu^4 - \nu^5 + 14\nu^6 = 0.$$

Essendo l'equazione non risolvibile con metodi elementari, la risolviamo numericamente tramite bisezione. Il calcolo $f(0) = -6$ e $f(1) = 3$ ci permette di disegnare il seguente grafico:

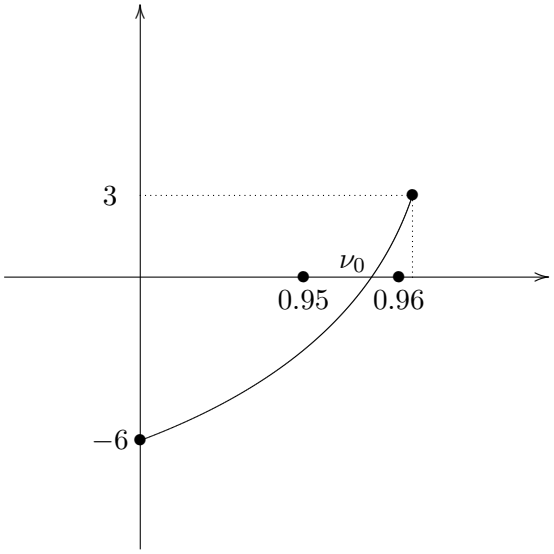


[2]Più precisamente, una volta trovato ν, il TIR è $\frac{1}{\nu} - 1$.

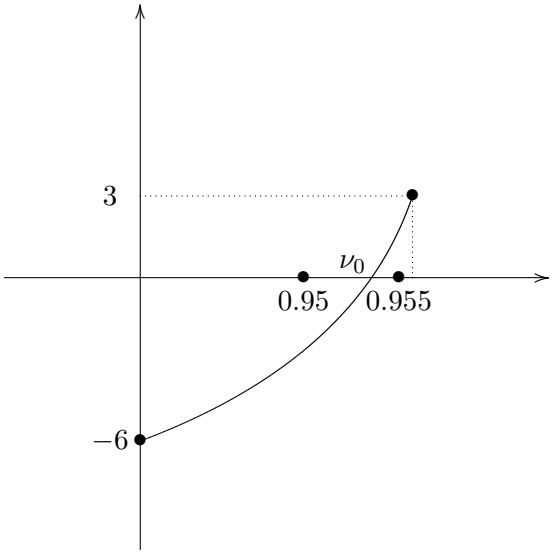
da cui si evince che ν_0 è compreso tra 0 e 1[3]. Il calcolo $f(0.9) < 0$ ci permette di disegnare



da cui otteniamo $\nu_0 \in [0.9, 1]$. Ancora $f(0.95) < 0$ e $f(0.96) > 0$ ci danno



da cui $\nu_0 \in [0.95, 0.96]$. Infine $f(0.955) > 0$ ci da



[3]Attenzione che nessuno ci garantisce che non ci siano altre soluzioni, per avere questa sicurezza bisognerebbe studiare la monotonia della funzione. Per questo tipo di operazioni finanziarie (investimenti e finanziamenti), però, ν_0 è sempre unico, come verrà visto più avanti nel corso.

da cui $\nu_0 \in [0.95, 0.955]$. Al meglio delle 2 cifre decimali possiamo allora approssimare ν_0 con 0.95, da cui TIR $= 1/0.95 - 1 \cong 0.05$. Chi ha approssimato con una sola cifra decimale ha ottenuto $\nu_0 = 1$, da cui ovviamente TIR $= 0$. ■

4. Bubi, che ha seguito Bobo nella trasferta, si sveglia improvvisamente la prima notte con un desiderio di fragole. Dopo aver tentato di ricondurla alla ragione, Bobo si mette alla ricerca dell'ambìto frutto! Dopo due ore di cammino in pieno deserto, incontra finalmente un venditore di fragole Navajo. Le fragole costano 50€[4], ma Bobo ha scordato il portafoglio! L'onesto venditore, afferrata al volo la situazione, propone a Bobo di pagare con comodo quando tornerà in Italia, secondo un regime governato da forza d'interesse $\delta(t) = 0.02t^3$, con t che misura il tempo in mesi. Bobo, che evidentemente non ha mai sentito parlare di forza d'interesse, accetta. Calcolare quanto Bobo dovrà pagare le fragole tra 6 mesi, al suo ritorno in Italia.

   Svolgimento.

   Regime r e forza d'interesse δ sono legati dalla relazione

   $$r(x) = e^{\int_0^x \delta(t)\,dt}$$

   per cui, assegnata $\delta(t) = 0.02t^3$, otteniamo

   $$r(x) = e^{\int_0^x \delta(t)\,dt} = e^{\int_0^x 0.02t^3\,dt} = e^{[0.02t^4/4]_0^x} = e^{0.005x^4}$$

   con x che misura il tempo in mesi. La cifra che Bobo si è impegnato a pagare dopo 6 mesi per una vaschetta di fragole è quindi

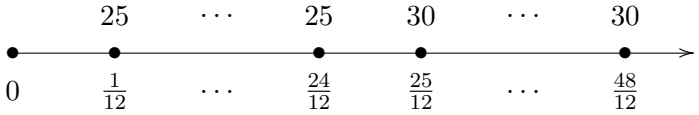
   $$50r(6) = 50e^{0.005\cdot 6^4} = 32598.5$$

   Una riflessione: una forza d'interesse costante pari a 0.02 avrebbe significato un tasso d'interesse su 6 mesi pari a $e^{0.12} - 1 \cong 12.75\%$. Probabilmente Bobo ha pensato che questo fosse un giusto interesse per la sua richiesta, sottovalutando così la crescita di terzo grado di δ! ■

5. Poche settimane dopo il ritorno in Italia, Bobo e Bubi hanno un bellissimo bimbo biondo platino, esattamente come la mamma! Bobo viene però a scoprire che Bubi è in realtà nera corvina, e si tinge i capelli alla fine di ogni mese da 4 anni. Considerando che il parrucchiere costava 25€ nei primi 2 anni e 1 giorno, e 30€ nel restante periodo, calcolare il valore oggi della tinta di Bubi usando un tasso di valutazione del 10% annuo.

   Svolgimento.

   L'operazione finanziaria da considerare è

   Abbiamo scelto come unità di misura l'anno, visto che il tasso di valutazione è annuale. Notare anche che il costo del parrucchiere in 2 è ancora 25, visto che solo il giorno dopo il prezzo cambierà. Il REA, o meglio il valore dell'operazione finanziaria al tempo 4 al tasso 10% annuale è

   $$25(1+0.1)^{\frac{47}{12}} + \cdots + 25(1+0.1)^{\frac{24}{12}} + 30(1+0.1)^{\frac{23}{12}} + \cdots + 30(1+0.1)^{\frac{1}{12}} + 30$$

[4] Un prezzo onesto, considerando che siamo in pieno inverno e in pieno deserto...

e ponendo $\nu = 1.1^{\frac{1}{12}}$ si ottiene

$$\begin{aligned} & 25\nu^{47} + \cdots + 25\nu^{24} + 30\nu^{23} + \cdots + 30\nu + 30 \\ =& 25\nu^{24}(\nu^{23} + \cdots + 1) + 30(\nu^{23} + \cdots + 1) \\ =& (25\nu^{24} + 30)\frac{1-\nu^{24}}{1-\nu} = 1586.69 \end{aligned}$$

Osserviamo che essendo il tasso di valutazione costante sui 4 anni, il fatto che la rata cambiasse dopo 2 anni e 1 giorno non comportava alcuna difficoltà! ■